Universidad de Navarra

Cálculo II (Ing.Gr.)

Guía docente 2025-26

PRESENTACIÓN

Breve descripción:

La asignatura de Cálculo II es un curso que se enfoca en el estudio y aplicación de conceptos y técnicas del cálculo en espacios de varias dimensiones. A través de este curso, los estudiantes adquieren un conocimiento más profundo de las funciones y operaciones en contextos multivariables. Este curso es una generalización del cálculo diferencial e integral en una variable al espacio euclídeo R^n.

Titulación (Módulo/Materia):

- Ingeniería en Tecnologías Industriales (Formación Básica/ Matemática Básica)
- Ingeniería Mecánica (Formación Básica/ Matemática Básica)
- Ingeniería Eléctrica (Formación Básica/ Matemática Básica)
- Ingeniería en Electrónica Industrial (Formación Básica/ Matemática Básica)
    - Ingeniería en Sistemas de telecomunicación (Formación Básica/ Matemáticas y Ciencias de la Computación)
    - Ingeniería en Organización Industrial (Formación Básica/ Matemática Básica)
    - Ingeniería en Diseño industrial y Desarrollo de productos (Formación Básica/ Matemática Básica)
    - Ingeniería Biomédica (Formación Básica/ Matemáticas básica)
- Ingeniería en Inteligencia Artificial (Formación Básica/Matemática Básica)

Detalles:

- **ECTS**: 6 ECTS
- **Curso, semestre**: 1er curso, 2.º semestre
- **Carácter**: Básica
- **Idioma**: Castellano

Profesores de la asignatura:

- Blanco del Prado, Carmen / Profesor contratado doctor
- Gutiérrez Gutiérrez, Jesús / Profesor Catedrático
- Barasoain Echepare, Íñigo /

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

R2- Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

R55 - Capacidad de resolver problemas de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales y capacidad para aplicar técnicas de optimización matemática.

INGENIERÍA MECÁNICA

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

R24 - Conocimiento en materias básicas y tecnológicas, que les capacite para el aprendizaje de nuevos métodos y teorías, y les dote de versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.

R2 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

INGENIERÍA ELÉCTRICA

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

R2 - Conocimiento en materias básicas y tecnológicas, que les capacite para el aprendizaje de nuevos métodos y teorías, y les dote de versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.

R3 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA INDUSTRIAL

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

R22 - Conocimiento en materias básicas y tecnológicas, que les capacite para el aprendizaje de nuevos métodos y teorías, y les dote de versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.

R2 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

INGENIERÍA EN SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio. (Tipo: Conocimientos o contenidos)

R2 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización. (Tipo: Conocimientos o contenidos)

INGENIERÍA EN ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

R2 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

R40 - Proporcionar bases sólidas en ciencias, tecnología, dirección de operaciones, producción y gestión de empresas.

INGENIERÍA EN DISEÑO INDUSTRIAL Y DESARROLLO DE PRODUCTOS

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio;

R3 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

INGENIERÍA EN INGENIERÍA BIOMÉDICA

R1 - Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio.

R31 - La formación debe proporcionar al egresado una base científica sólida que permita abordar con rigor los retos profesionales del sector biomédico.

R23 - Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.

INGENIERÍA EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Universidad de Navarra

R1 - Describir los fundamentos de álgebra lineal; geometría, geometría diferencial, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, métodos numéricos, algorítmica numérica, estadística y optimización para resolver problemas matemáticos aplicados al ámbito de la Ingeniería. (Tipo: Conocimientos o contenidos)

PROGRAMA

1. El espacio R^n. El espacio euclídeo R^n . Distancia y bolas en R^n . Conjuntos abiertos y cerrados.

2. Límites y continuidad de funciones de varias variables. Funciones escalares de n variables: dominio, gráfica, conjuntos de nivel. Límites y continuidad de funciones escalares. Propiedades de las funciones continuas. Funciones vectoriales de dimensión m de n variables. Límites y continuidad de funciones vectoriales. Composición de funciones continuas.

3. Diferenciación de funciones de varias variables. Derivadas parciales. Vector gradiente. Derivadas parciales de orden superior. Teorema de Schwarz. Funciones escalares diferenciables. Propiedades de las funciones diferenciables. Diferencial de una función escalar. Diferencial segunda de funciones escalares. Matriz Hessiana. Funciones vectoriales diferenciables. Matriz Jacobiana. Diferencial de una función vectorial. Diferencial segunda de funciones vectoriales. Composición de funciones diferenciables. Regla de la cadena.

4. Operadores diferenciales. Gradiente de un campo escalar y sus propiedades. Laplaciana de un campo escalar. Divergencia y rotacional de un campo vectorial. Formas diferenciales y funciones potenciales.

5. Fórmula de Taylor. Teorema de Taylor y teorema del valor medio.

6. Funciones implícitas. Funciones implícitas escalares y vectoriales.

7. Extremos de funciones escalares. Extremos absolutos y relativos. Condiciones necesarias y condiciones suficientes de extremo relativo.

8. Extremos condicionados. Método de los multiplicadores de Lagrange.

9. Integrales dependientes de parámetros. Definiciones. Propiedades. Funciones Gamma y Beta.

10. Integrales múltiples. Definiciones. Cálculo de integrales dobles. Cambio de variables. Integrales triples.

11. Integrales curvilíneas. Curvas planas y curvas en el espacio. Integral curvilínea de un campo escalar. Integral curvilínea de un campo vectorial. Campos conservativos.

12. Integrales de superficie. Superficies alabeadas. Integral de superficie de un campo escalar. Integral de superficie de un campo vectorial.

13. Teoremas integrales. Teorema de Green. Teorema de Gauss. Teorema de la divergencia. Teorema de Stokes.

_____

Universidad de Navarra

1. The space R^n. The Euclidean space R^n. Distance and balls in R^n. Open and closed sets.

2. Limits and continuity of functions of several variables. Scalar functions of n variables: domains, graphs, level sets. Limits and continuity of scalar functions. Properties of continuous functions. Vector functions of dimension m of n variables. Limits and continuity of vector functions. Composition of continuous functions.

3. Differentiation of functions of several variables. Partial derivatives. Gradient vector. Repeated partial derivatives. Schwarz's theorem. Differentiable scalar functions. Properties of differentiable functions. Differential of a scalar function. Second and higher differentials of scalar functions. Hessian matrix. Differentiable vector functions. Jacobian matrix. Differential of a vector function. Second and higher differentials of vector functions. Composition of differentiable functions. Chain rule.

4. Differential operators. Gradient of a scalar field and properties. Laplacian of a scalar field. Divergence and curl of a vector field. Differential forms and potential functions.

5. Taylor's formula. Taylor's theorem and mean value theorem.

6. Implicit functions. Implicit scalar and vector functions.

7. Extrema of scalar functions. Absolute and relative extrema. Necessary and sufficient conditions of relative extrema.

8. Conditional extrema. Method of Lagrange multipliers.

9. Parametric integrals. Definition of parameter-dependent integrals. Properties. Gamma and Beta functions.

10. Multiple integrals. Double integrals. Definitions. Calculation of double integrals. Change of variables. Triple integrals.

11. Curve integrals. Plane curves and curves in R^n. Curve integral of a scalar field. Curve integral of a vector field. Conservative vector fields.

12. Surface integrals. Surfaces in R^3. Surface integral of a scalar field. Surface integral of a vector field.

13. Integral theorems. Green's theorem. Gauss' theorem. Divergence theorem. Stokes' theorem.

ACTIVIDADES FORMATIVAS

La dedicación de 150-180h (6 ECTS) a la asignatura de Cálculo II se divide en las siguientes

actividades formativas:

Clases presenciales teóricas: 20 horas

Clases presenciales prácticas, laboratorios o talleres: 40 horas

Tutorías: 1 hora

Estudio personal: 112 horas

Universidad de Navarra

Evaluación: 7 horas

METODOLOGÍAS DOCENTES

- Clases expositivas
- Entrevista personal con el profesor de una asignatura
- Estudio del alumno basado en diferentes fuentes de información
- Realización de pruebas evaluadas

Las clases presenciales (en aula) incluirán tanto el **desarrollo teórico** de la asignatura como la resolución de **ejercicios prácticos**. Se deja a disposición de los estudiantes material de estudio (en el área interna) para el seguimiento de la asignatura y el estudio personal orientado a la adquisición de los conocimientos, conceptos y capacidades. El material de estudio incluye ejercicios propuestos para su resolución, soluciones a los ejercicios, ejemplos de exámenes de otros años, vídeos y tutoriales, etc.

Los profesores estarán a disposición de los estudiantes para **atender dudas** y ayudar, de manera más personalizada, a la adquisición de los conocimientos, habilidades y destrezas.

Durante el cuatrimestre se realizarán diferentes **pruebas evaluadas** para evaluar el avance de los estudiantes, así como un examen final en la fecha indicada en el cronograma (área interna).

EVALUACIÓN

Atención: Se recuerda que cualquier intento de fraude, copia, plagio u otro comportamiento irregular supone una infracción grave y, como tal, es sancionable de acuerdo con el Sistema de normas sobre la convivencia en la Universidad de Navarra (Título IV "Normas de disciplina académica de los estudiantes").

CONVOCATORIA ORDINARIA

La evaluación ordinaria de la asignatura se efectuará a través de tres exámenes.

Prueba 1

- Contenido: Aproximadamente la materia vista hasta el día del examen (se concretará con suficiente antelación).
- Puntuación: 3 puntos.
- Fecha: Lunes, 2 de marzo a las 8:30

Prueba 2

- Contenido: Aproximadamente la materia vista desde el examen anterior hasta el día del examen (se concretará con suficiente antelación).
- Puntuación: 3 puntos.
- Fecha: Sábado, 11 de abril

Examen ordinario

- El examen constará de tres partes. El contenido de las dos primeras partes será el mismo que el de las pruebas 1 y 2. El contenido de la tercera parte será el resto de la materia.
- Puntuación:
  - Primera parte: 3 puntos
  - Segunda parte: 3 puntos
  - Tercera parte: 4 puntos
- Fecha: Lunes, 25 de mayo a las 9:00

Calificación final: max(P1,E1) + max(P2,E2) + E3, donde

- P1: calificación en la Prueba 1 (sobre 3)
- P2: calificación en la Prueba 2 (sobre 3)
- E1: calificación en la primera parte del examen ordinario (sobre 3)
- E2: calificación en la segunda parte del examen ordinario (sobre 3)
- E3: calificación en la tercera parte del examen ordinario (sobre 4)

Será necesaria una calificación final igual o superior a 5 para aprobar.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

- Contenido: la asignatura completa (No se guardarán para la convocatoria extraordinaria las notas obtenidas en los exámenes parciales.)
- Puntuación: 10 puntos, con la misma distribución que en el examen ordinario.
- Fecha: Martes, 23 de junio a las 9:00

Será necesaria una calificación igual o superior a 5 para aprobar.

HORARIOS DE ATENCIÓN

Los martes de 15:30 a 17:00 en el Aula 2 los profesores de la asignatura estarán disponibles para la atención de dudas individuales o en pequeños grupos. Durante este tiempo los alumnos pueden trabajar en el aula individualmente o en grupos, compara los resultados de ejercicios y problemas, etc.

También se puede contactar por correo electrónico con los profesores de la asignatura.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica:

1. JM Martínez-Esnaola, C Blanco del Prado. Cálculo II: Notas de clase. Escuela de Ingenieros, TECNUN, Universidad de Navarra (2024).
2. A García, A López, F García, G Rodríguez, A Gutiérrez, A de la Villa. Calculo II: Teoría y problemas de funciones de varias variables. Glagsa, Madrid (2002). Localizalo en la biblioteca
3. J Stewart. Cálculo multivariable. Thomson, Madrid (2002). Localizalo en la biblioteca

Bibliografía complementaria:

Universidad de Navarra

1. J De Burgos Román. Cálculo infinitesimal: Teoría y problemas. Alhambra (1992). Localizalo en la biblioteca
2. J De Burgos Román. Cálculo integral (una y varias variables): 70 problemas útiles. García-Maroto Editores (2007).
3. GB Thomas, RL Finney. Cálculo con geometría analítica, Vols. I y II. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (1987). Localizalo en la biblioteca Localizalo en la biblioteca
4. W Rudin. Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill, New York (1976). Localizalo en la biblioteca